



Спиральность тайфуна в модели спиральной турбулентности

П.Б. Руткевич*, Г.С. Голицын**, Б.П. Руткевич*

*) Институт космических исследований РАН, Москва, ул. Профсоюзная 84/32.

e mail: pbrutkevich@gmail.com , bprutkevych@gmail.com

***) Институт физики атмосферы РАН, 119017, Москва, Пыжевский пер., 3,

email: gsg@ifaran.ru

Работа посвящена исследованию генерации спиральности мелкомасштабной турбулентности с целью обоснования генерации крупномасштабных вихрей в тропической атмосфере типа тропических циклонов.

Представляет определённый интерес вопрос о генерации спиральности в крупномасштабных структурах, существующих в природе.


В работе [С.С. Моисеев, П.Б. Руткевич, А.В. Тур, В.В. Яновский. // Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью. ЖЭТФ, 1988, Т.94, С.144-153.] приводятся уравнения для потенциалов полоидального и тороидального полей скорости (формулы (23) - (24)):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)^2 \Delta\varphi - Ra\Delta_{\perp}\varphi = -Ra \cdot s\mu_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \left(\Delta_{\perp} - (\vec{e}\nabla)^2\right)\psi, \quad (23)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\psi = -Ra \cdot s\mu_1 (\vec{e}\nabla)^2 \varphi, \quad (24)$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{\Pi} + \vec{V}_T, \quad \vec{V}_{\Pi} = rot(\vec{e}\varphi), \quad \vec{V}_T = rot(\vec{e}\psi).$$

Ra – число Рэлея, s - параметр спиральности, μ_1 – коэффициент.



Примем толщину слоя атмосферы $h=10000$ м,
турбулентную вязкость $\nu_T = 1000 \text{ м}^2 / \text{с}$.

Примем характерную скорость в тайфуне $v=10$ м/с.
Получим для ускорения $a=0,01$ м/с².

Исключаем из системы (23)-(24) тороидальное поле скорости

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right)^2 \Delta \varphi - Ra \Delta_{\perp} \varphi = -(Ra \cdot s \mu_1)^2 (\vec{e} \nabla)^4 \varphi.$$

Стационарное уравнение:

$$\left(\Delta_{\perp} - K_z^2 \right)^3 \varphi - Ra \Delta_{\perp} \varphi = -(Ra \cdot s \mu_1)^2 K_z^4 \varphi.$$

Δ_{\perp} - горизонтальный лапласиан,

K_z - вертикальное волновое число.

Дисперсионное соотношение для стационарного случая:

$$\left(K_z^2 + k^2\right)^3 - Rak^2 = Ra^2 (s\mu_1)^2 K_z^4.$$

Обычное, (не спиральное) число Рэлея как известно имеет вид:

$$Ra = \frac{\left(K_z^2 + k^2\right)^3}{k^2}$$

Спиральное число Рэлея :
$$Ra = \frac{-k^2 \pm \sqrt{k^4 + 4(s\mu_1)^2 K_z^4 (K_z^2 + k^2)^3}}{2(s\mu_1)^2 K_z^4}.$$

Приближённо $s\mu_1 \rightarrow 0$

$$Ra \approx \frac{\left(K_z^2 + k^2\right)^3}{k^2} \left(1 - (s\mu_1)^2 \frac{K_z^4}{k^4} (K_z^2 + k^2)^3 + \dots \right)$$

Спиральное число Рэлея

$$Ra = k^2 \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(s\mu_1)^2 \frac{K_z^4}{k^4} (K_z^2 + k^2)^3}}{2(s\mu_1)^2 K_z^4}.$$

$$Ra \approx k^2 \frac{2(s\mu_1)^2 \frac{K_z^4}{k^4} (K_z^2 + k^2)^3}{2(s\mu_1)^2 K_z^4} \approx k^2 \frac{\frac{K_z^4}{k^4} (K_z^2 + k^2)^3}{K_z^4} \approx \frac{(K_z^2 + k^2)^3}{k^2}$$

Спиральное число Рэлея переходит в обычное число Рэлея, при устремлении спиральности к нулю.

Приближенное выражение критического числа Рэлея
при малых горизонтальных волновых числах $k \rightarrow 0$

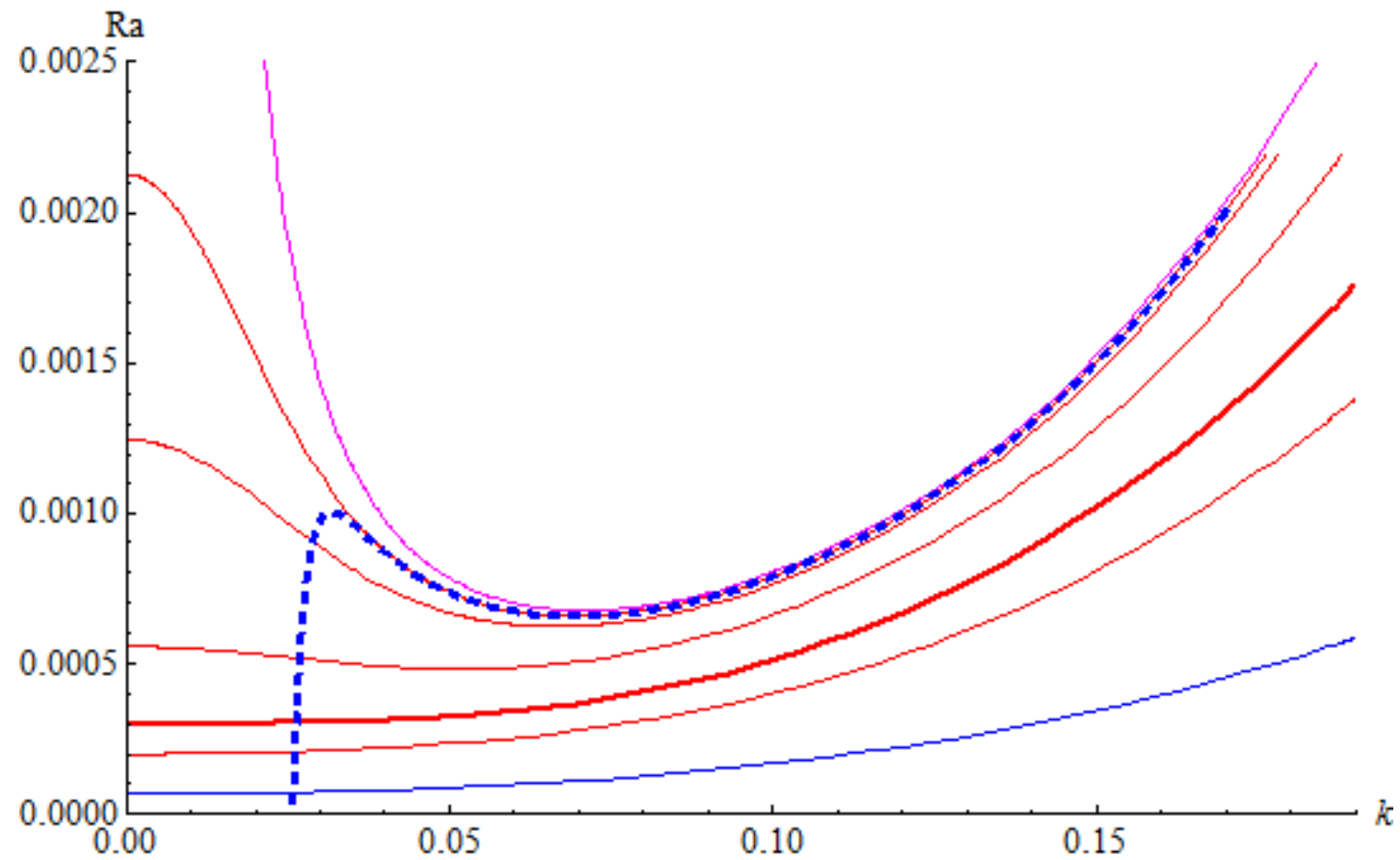
$$Ra = k^2 \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(s\mu_1)^2 \frac{K_z^4}{k^4} (K_z^2 + k^2)^3}}{2(s\mu_1)^2 K_z^4}.$$
$$Ra(k^2) = \frac{K_z}{(s\mu_1)} + \frac{-1 + 3(s\mu_1)K_z^3}{2(s\mu_1)^2 K_z^4} k^2 + \dots$$

Находим экстремум $\frac{dRa(k^2)}{dk^2} = \frac{-1 + 3(s\mu_1)K_z^3}{2(s\mu_1)^2 K_z^4} = 0.$

Крупномасштабная неустойчивость начинается, когда производная обращается в нуль. Граница крупномасштабной неустойчивости:

$$-1 + 3(s\mu_1)K_z^3 > 0, \quad s\mu_1 > \frac{1}{3K_z^3}.$$

Спиральное число Рэлея



Оценим плотность спиральности турбулентности в атмосфере Земли в поле силы Кориолиса

$$\bar{H} = \frac{\int_0^R r dr \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta (\vec{V}(r, z) \cdot \text{rot} \vec{V}(r, z))}{\int_0^R r dr \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta}. \quad \langle \vec{V} \text{rot} \vec{V} \rangle = \frac{\Omega v_T}{h}.$$

Примем: $R = 100 \text{ км}, h = 10 \text{ км}, \Omega = 3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}, v_T = 10^3 \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$


$$\bar{H} = \frac{\pi R^2 h \Omega v_T}{\pi R^2 h^2} \approx \frac{\Omega v_T}{h} \approx \frac{3}{10^5 \text{ с}} 10^3 \frac{\text{м}^2}{\text{с}} \frac{1}{10^4 \text{ м}} \approx 3 \frac{1}{10^2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \frac{1}{10^4} \approx \frac{3}{10^6} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

$$K_{\text{ЗК}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2.22144, \quad s\mu_k > \frac{1}{3K_{\text{ЗК}}^3} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi^3} \approx 0,0304.$$

Учитывая размерное значение ускорения получаем размерное критическое значение спиральности

$$a = 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \quad s\mu_k > 0,000304 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Чтобы имела место крупномасштабная неустойчивость, спиральность должна быть $s\mu_k > 0,000304 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$



Рассмотрим исходное стационарное уравнение для потенциала полоидального поля скорости

$$\left(\Delta_{\perp} - K_z^2\right)^3 \varphi - Ra \Delta_{\perp} \varphi = -\left(Ra \cdot s \mu_1\right)^2 K_z^4 \varphi.$$

Запишем, уравнение в виде:

$$\varphi''(r) + \frac{1}{r} \varphi'(r) + W(r) \varphi(r) = 0,$$

потенциал $W(r)$ считаем аксиально-симметричным, и его явный вид принимаем простейшим

$$W(r) = W_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right).$$

Уравнение с потенциалом $W(r)$ имеет явное решение:

$$\varphi(r) = B \frac{\sqrt{2}}{r} \exp\left(-\frac{r^2 \sqrt{W_0}}{2r_0}\right) \sqrt{r^2} \text{LaguerreL}\left[\frac{1}{4}\left(-2 + r_0 \sqrt{W_0}\right), \frac{r^2 \sqrt{W_0}}{r_0}\right].$$



Функции Лагерра находят из уравнения:

$$xy''(x) + 2y'(x) + \left(\lambda - \frac{x}{4} - \frac{j(j+1)}{x} \right) y(x) = 0. \quad (1)$$

Ищем его решение в виде произведения экспоненты и полинома:

$$y(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) z(x). \quad (2)$$

Предполагаем, что полином $z(x)$ на бесконечности растёт медленнее экспоненты. Подставляем в уравнение и получаем уравнение для полинома Лагерра $z(x)$:

$$xz''(x) + (\nu + 1 - x)z'(x) + \lambda z(x) = 0. \quad (3)$$

Выпишем этот полином в явном виде: $z(x) = \sum_{n=0} a_n x^n$.

Подставляем это разложение в (3), и получаем рекуррентное соотношение для коэффициентов полинома:

$$a_{n+1} = \frac{n - \lambda}{(n+1)(n + \nu + 1)} a_n.$$

Чтобы бесконечный полином рос медленнее экспоненты, он должен быть конечным. Для этого достаточно, чтобы $a_{n+1} = 0$. Тогда после него все старшие члены тоже будут нулевыми. Отсюда получаем условие: $n = \lambda$.

$$\varphi(r) = B \frac{\sqrt{2}}{r} \exp\left(-\frac{r^2 \sqrt{W_0}}{2r_0}\right) \sqrt{r^2} \text{LaguerreL}\left[\frac{1}{4}\left(-2 + r_0 \sqrt{W_0}\right), \frac{r^2 \sqrt{W_0}}{r_0}\right].$$

Принимаем значения параметров: $W_0=36$, $r_0=1$.

График решения для потенциала полоидального поля скорости:

```
Plot[Y1[r] /. subAB, {r, 0., 2}, PlotStyle -> {Red, Thick},
PlotRange -> All]
```

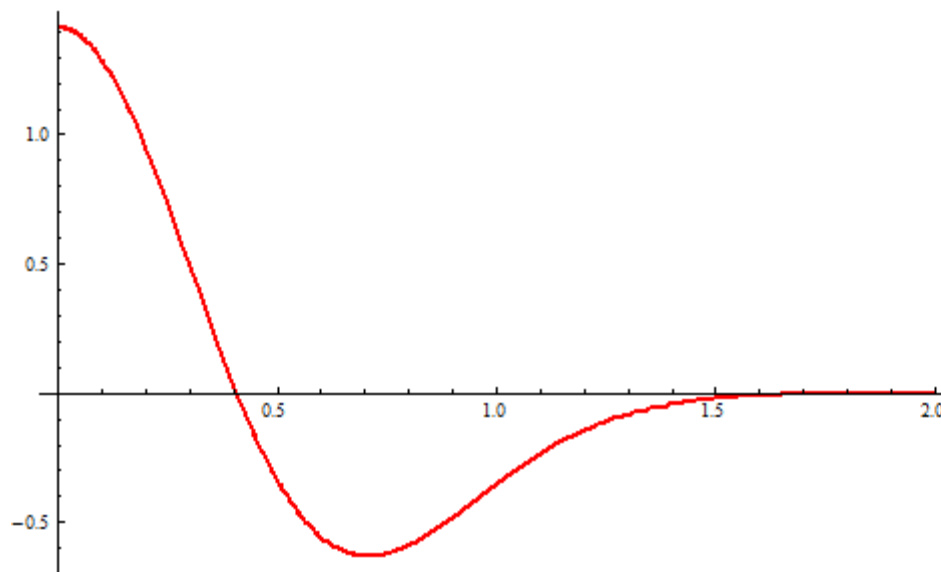
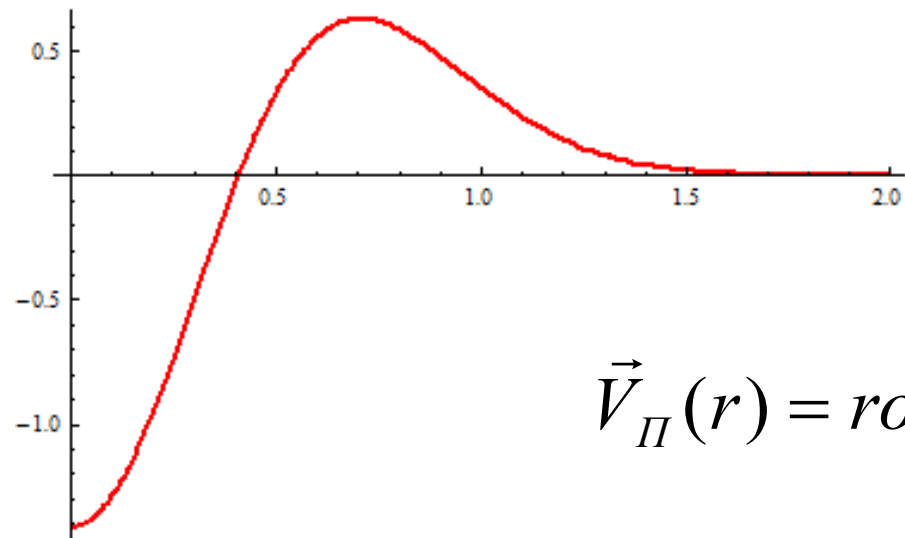




График решения для полоидального поля скорости:

```
Plot[Y2[r] /. subAB2, {r, 0., 2}, PlotStyle -> {Red, Thick}]
```



$$\vec{V}_{\Pi}(r) = \text{rot}(\vec{e} \varphi(r)),$$

Уравнение для потенциала
полоидального поля скорости:

$$\varphi''(r) + \frac{1}{r} \varphi'(r) + W(r) \varphi(r) = 0,$$

с потенциалом $W(r) = W_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right).$



Исходная система уравнений для потенциалов полоидального и тороидального полей скорости имеет вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)^2 \Delta\varphi - Ra\Delta_{\perp}\varphi = -Ra \cdot s\mu_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \left(\Delta_{\perp} - (\vec{e}\nabla)^2\right)\psi,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\psi = -Ra \cdot s\mu_1 (\vec{e}\nabla)^2 \varphi,$$

Стационарное уравнение:

$$\Delta\psi = Ra \cdot s\mu_1 (\vec{e}\nabla)^2 \varphi.$$

Для определения потенциала тороидального поля решаем неоднородное дифференциальное уравнение методом неопределённых коэффициентов.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi}{r \partial r} - \kappa^2 \psi = f(r),$$

Система для коэффициентов:

$$C_1' Y_1 + C_2' Y_2 = 0,$$

$$C_1' Y_1' + C_2' Y_2' = f(r).$$

$$\Delta = Y_1 Y_2' - Y_1' Y_2, \quad \Delta_1 = -Y_2 f(r), \quad \Delta_2 = f(r) Y_1. \quad C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

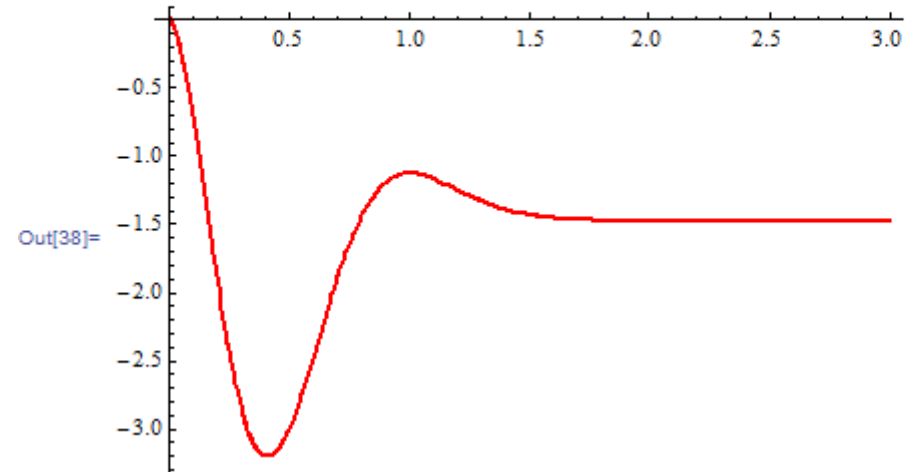
$$C_1' = -\frac{f(r) Y_2}{Y_1 Y_2' - Y_1' Y_2}, \quad C_2' = \frac{f(r) Y_1}{Y_1 Y_2' - Y_1' Y_2}.$$

Неопределённые коэффициенты

$$C_1(r) = -\int dr \frac{f(r) Y_2}{Y_1 Y_2' - Y_1' Y_2}, \quad C_2(r) = \int dr \frac{f(r) Y_1}{Y_1 Y_2' - Y_1' Y_2}.$$

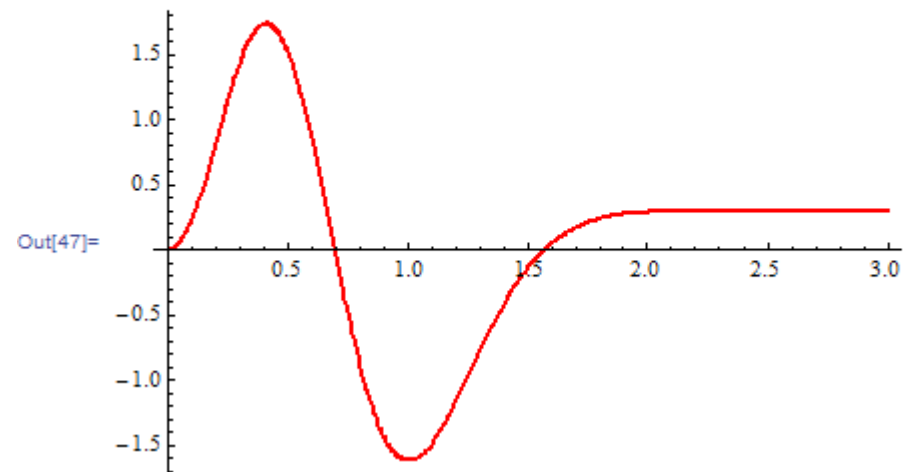
Коэффициент C_1
как функция радиуса.

```
In[38]:= Plot[C11[x] /. subAB2, {x, 0., 3},  
PlotStyle -> {Red, Thick}, PlotRange -> All]
```



Коэффициент C_2
как функция радиуса.

```
In[47]:= Plot[C21[x] /. subAB2, {x, 0., 3},  
PlotStyle -> {Red, Thick}, PlotRange -> All]
```



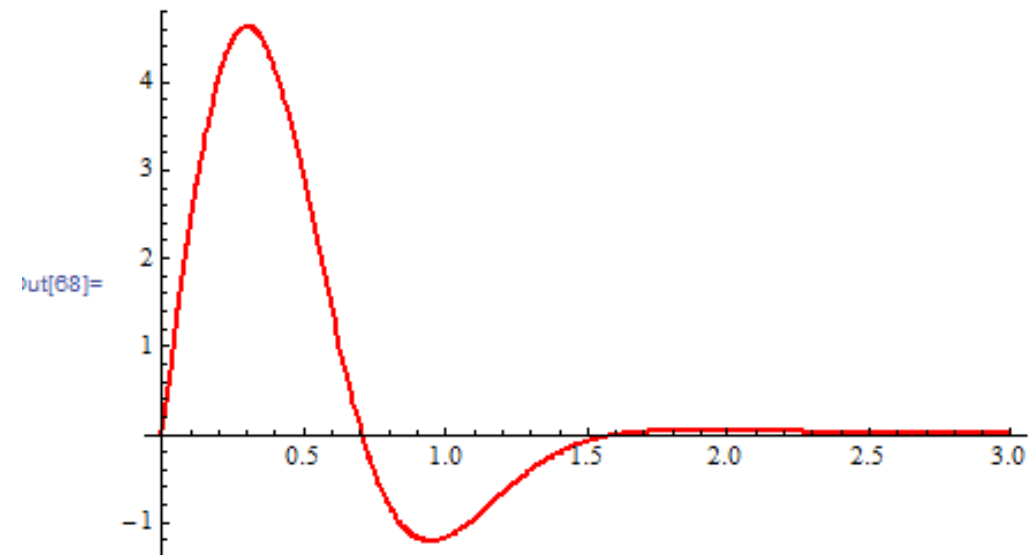
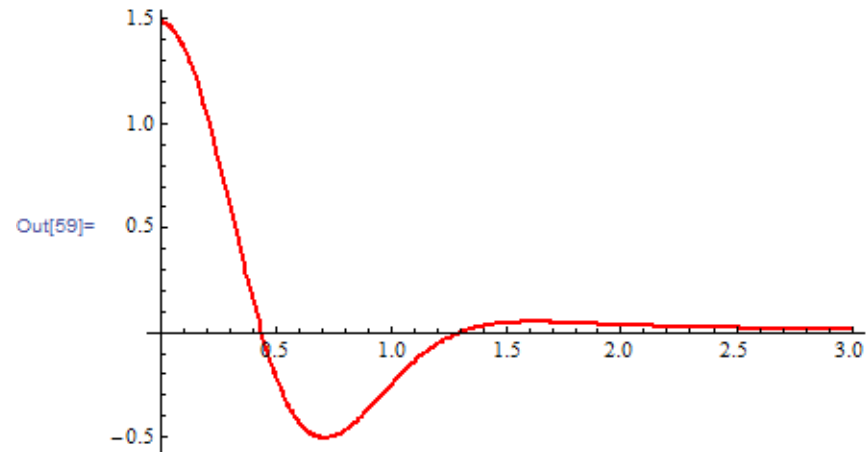
Потенциал тороидального
поля скорости

$$\psi(r).$$

Тороидальное поле скорости
(азимутальная скорость)

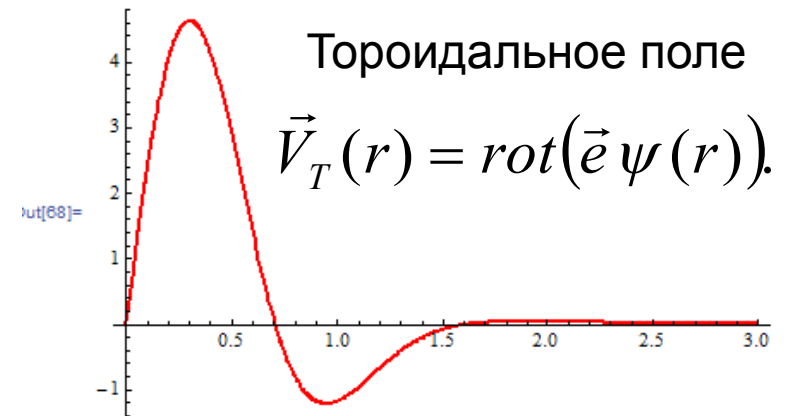
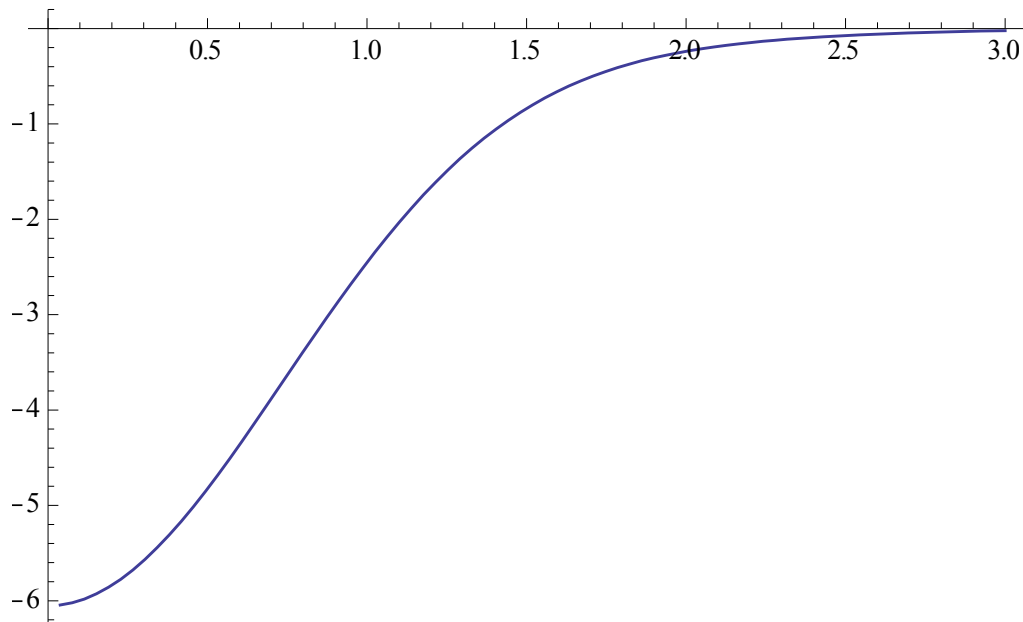
$$\vec{V}_T(r) = \text{rot}(\vec{e} \psi(r)).$$

```
In[59]:= Plot[ψ[x] /. subAB2, {x, 0., 3},  
PlotStyle -> {Red, Thick}, PlotRange -> All]
```

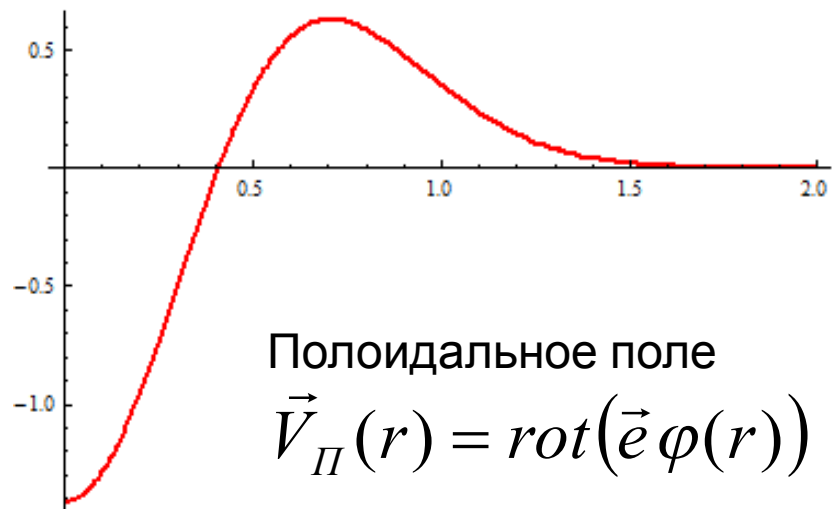




Спиральность $v_{rot}[v]$ как функция радиуса.



```
Plot[Y2[r] /. subAB2, {r, 0., 2}, PlotStyle -> {Red, Thick}]
```



Оценим плотность спиральности $\langle \vec{V}_{rot} \vec{V} \rangle$

Примем скорость ветра 30 м/с, толщину слоя $h=10000$ м

$$\langle \vec{V}_{rot} \vec{V} \rangle = 30 \frac{м}{с} \frac{1}{10\,000\, м} 30 \frac{м}{с} = 0.09 \frac{м}{с^2}$$

Спиральность тайфуна $v_{rot}[v]$
в модели спирального тайфуна
как функция радиуса.

